

基于 IPDG 方法的嵌套网格技术

赵 博¹, 赵 明¹, 刘 伟², 李孝检¹, 刘正先¹

(1. 天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300350;

2. 电子科技大学 计算机科学与工程学院, 成都 611731)

摘 要: 在内罚间断伽辽金(IPDG)方法框架内应用嵌套网格技术求解了二维可压缩 Navier-Stokes 方程。通过把黏性通量作为辅助变量实现了 Navier-Stokes 方程的降阶, 继而用间断有限元方法进行离散得到空间半离散方程。时间推进采用 Newton-Krylov 隐式方法。利用库埃特流动精确解验证了该方法的精度。在此基础上, 对包括有黏 NACA0012 翼型绕流、定常和非定常的圆柱绕流在内的若干典型测试算例开展数值模拟, 进一步验证了该方法的鲁棒性和可靠性。在嵌套网格中应用了 h 型网格自适应技术用于提高激波分辨率, 对 NACA0012 翼型无黏跨声速绕流开展数值模拟, 结果表明: 自适应之后的单元数相比无自适应时只增加了 8.4%, 但是激波分辨率得到了显著提高, 激波附近的计算结果也与实验值符合得更好, 从而验证了该方法的有效性。

关 键 词: 二维可压缩 Navier-Stokes 方程; 嵌套网格; 间断伽辽金方法; 内罚方法; h 型网格自适应技术
中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Chimera grid technology with IPDG method

ZHAO Bo¹, ZHAO Ming¹, LIU Wei², LI Xiaojian¹, LIU Zhengxian¹

(1. Department of Mechanics,

School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China;

2. School of Computer Science and Engineering,

University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: An internal penalty discontinuous Galerkin (IPDG) method was developed to solve the 2-D (two-dimensional) compressible Navier-Stokes equations together with chimera grid technique. The viscous flux was introduced as an auxiliary variable to reduce the equation order. The semi-discrete equation was solved with the discontinuous Galerkin method, and time marching was carried out with the implicit Newton-Krylov method. The accuracy of above methods was validated with the Couette flow in comparison of the exact solution. In addition, several test cases including viscous NACA0012 airfoil, steady and unsteady flow around a circular cylinder were simulated to verify the robustness and feasibility of the present methods. Eventually, the h-grid adaptive technique was also adopted in chimera grid to improve the resolution of shock wave. The inviscid transonic flow case over NACA0012 airfoil was also simulated. Result showed that, the number of cells after adaptation only increased by 8.4% compared with that without adaptation, but the shock resolution was significantly improved, and the calculated re-

收稿日期: 2021-05-25

基金项目: 国家自然科学基金(11972250, 11672206); 天津市自然科学基金青年项目(20JCQNJC01950);
天津市自然科学基金重点项目(19JCZDJC32000)

作者简介: 赵博(1999—), 男, 硕士生, 主要从事计算流体力学研究。

通信作者: 赵明(1985—), 男, 讲师、硕士生导师, 博士, 主要从事计算流体力学研究。E-mail: ming.zhao@tju.edu.cn

引用格式: 赵博, 赵明, 刘伟, 等. 基于 IPDG 方法的嵌套网格技术[J]. 航空动力学报, 2022, 37(6): 1206-1216. ZHAO Bo, ZHAO Ming, LIU Wei, et al. Chimera grid technology with IPDG method[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(6): 1206-1216.

sults near the shock were in better agreement with the experimental values, thereby verifying the effectiveness of the method.

Key words: two-dimensional compressible Navier-Stokes equations; chimera grid; discontinuous Galerkin method; interior penalty method; h-grid adaptive technique

嵌套网格技术于1983年由Benek等^[1]提出,自此以后就不断被应用到各个工程领域中。嵌套网格技术将整个计算域划分为多个拓扑结构,每个拓扑结构单独生成网格。因此相比于单块网格,嵌套网格可以降低复杂外形结构网格的生成的难度^[2]。另外该方法还可以对包含相对运动的复杂系统划分网格,比如直升机旋翼^[3-4]。

近些年来,由于高阶精度格式具有较小的数值耗散和色散,所以在求解多尺度的流动问题,如湍流、气动声学等问题方面具有明显的优势,越来越受到关注^[5]。在高精度数值方法框架内应用嵌套网格技术也成为一种趋势。然而传统的高精度有限差分 and 有限体积格式的构造往往需要通过拓展模板来实现,所以应用在嵌套网格中时会使得洞边界点增多,紧致性不好^[6]。这个缺点还会增大网格中出现插值孤立点的可能性并且使得不同网格块之间的流场信息交换过程变得复杂^[7]。另外一种高精度计算方法,间断伽辽金(discontinuous Galerkin, DG)方法因其计算精度高、紧致性好、具有良好的数学特性等特点备受关注。Reed和Hill在求解中子运输方程时首先提出了DG方法^[8],后来Cockburn等将其应用在双曲守恒系统的求解中^[9-11],更多关于DG方法的发展历程可以在文献[12]中找到。

由于DG方法具有上述计算精度高、紧致性好的特点,所以将其应用在嵌套网格中时不仅可以得到分辨率更高的流场还可以简化“挖洞”以及不同网格块之间流场信息传递的过程。近年来,已经有学者在DG方法框架内应用了嵌套网格技术。Galbraith等在DG方法框架内应用嵌套网格技术求解了欧拉方程^[13-15]和Navier-Stokes(N-S)方程^[16]。Nastase等在贴体网格中采用有限体积方法而在背景网格中采用DG方法^[17]。Brazell等在背景网格中应用了网格自适应技术和DG方法^[18]。

另一方面,在利用DG方法求解N-S方程时,不同学者针对黏性项提出了不同的离散方案。例如,Bassi和Rebay提出了BR1(Bassi-Rebay 1)格

式^[19],但是这种格式后来被证明是不相容的^[20]。随后他们改进了BR1格式,为了提高算法的收敛性和紧致性提出了BR2(Bassi-Rebay 2)格式^[21]。Cockburn和Shu提出了另外一种黏性项离散方法LDG(local discontinuous Galerkin)方法^[22]。BR1、BR2以及LDG格式都采用将N-S方程中守恒变量的梯度作为中间变量的方法对方程进行降阶。Lions在求解带Dirichlet边界条件的椭圆型方程时,通过引入罚系数将Dirichlet边界转换为Neumann边界,从而提出了内罚方法(interior penalty, IP)。随后Hartmann和Houston将IP方法与DG方法结合用于求解可压缩N-S方程,提出了内罚间断伽辽金方法(IPDG)^[23-24]。与BR格式相比,IPDG方法不需要计算和储存提升算子,具有紧致性更好、易于编程等优点。De Wiart等^[25]将IPDG方法用于槽道流的大涡模拟(LES)计算,结果显示该方法具有良好的计算精度。Arnold等^[20]对BR1、BR2、LDG、IP等求解耗散项方法的变量通量和黏性通量取法进行了分析,进而统一了它们的形式并证明了相容性和收敛性。

但是目前在IPDG方法框架内应用嵌套网格技术以及在背景网格和贴体网格中同时应用网格自适应技术的尝试还比较少。考虑到IPDG方法紧致性好、易于编程的特点,本文结合Newton-Krylov隐式方法在嵌套网格中应用IPDG方法求解了二维可压缩N-S方程。通过几个典型的测试算例验证了方法的可靠性。最后在嵌套网格中应用了h型网格自适应技术用于提高激波分辨率,通过无黏跨声速NACA0012翼型绕流算例验证了该方法的有效性。

1 数值方法

1.1 控制方程

二维可压缩N-S方程可以写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F^c(U) - \nabla \cdot F^v(U, \nabla U) = 0 \quad (1)$$

守恒变量 U 、无黏通量 $F^c = (F_x^c, F_y^c)$ 、黏性通量 $F^v = (F_x^v, F_y^v)$ 的具体形式如下:

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} & F_x^c(U) &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} \\
 F_y^c(U) &= \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix} \\
 F_x^v(U, \nabla U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix} \\
 F_y^v(U, \nabla U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中 $\rho, u, v, E, p, T, \kappa, \tau_{ij}$ 分别表示密度、 x 方向的速度分量、 y 方向的速度分量、流体单位总能、压力、温度、导热系数和黏性应力张量分量。

1.2 IPDG 方法的空间离散

假设计算域为 Ω , Ω_e 为计算域内非重叠单元的集合, S 为计算域边界, S_e 为单元 Ω_e 的边界, $\mathbf{n}$ 表示单元边界的外法线矢量。定义有限元空间 V_h 为

$$V_h^q = \left\{ v_h \in [L^2(\Omega)]^m : v_h|_{\Omega_e} \in [V_q^m], \forall \Omega_e \in \Omega \right\} \quad (3)$$

式中 $L^2(\Omega)$ 代表计算域内勒贝格平方可积的函数空间, V_q^m 表示局部空间单元上的 m 维 q 阶多项式。将守恒变量 U 和测试函数 φ 按照局部空间单元多项式的基函数展开得到

$$U \approx U_h = \sum_{j=1}^{q+1} u_j \varphi_j \quad (4)$$

$$\varphi \approx \varphi_h = \sum_{j=1}^{q+1} \varphi_j \quad (5)$$

其中 u_j 表示数值解的自由度。将式(1)乘上测试函数并在每个单元上积分, 再进行一次分部积分得到方程的弱形式

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_e} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \\
 & \int_{S_e} \left[F^c(U_h) - F^v(U_h, \nabla U_h) \right] \cdot \mathbf{n} \varphi_h dS - \\
 & \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_h \cdot \left[F^c(U_h) - F^v(U_h, \nabla U_h) \right] d\Omega = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

不同于 BR 格式, IP 方法将方程中的黏性通

量作为中间变量, 令

$$\Theta = F^v(U_h, \nabla U_h) = G \nabla U_h \quad (7)$$

其中张量 G 为黏性通量 2 个方向分量上的 4 个分量对 4 个守恒变量的梯度的导数, 则可以将式(6)写为两个方程

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_e} \Theta W_h d\Omega = \int_{\Omega_e} G \nabla U_h W_h d\Omega = \\
 & \int_{S_e} \hat{U}_h \cdot \mathbf{n} (G^T W_h) dS - \int_{\Omega_e} U_h \nabla (G^T W_h) d\Omega \quad (8) \\
 & \int_{\Omega_e} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \\
 & \int_{S_e} \left[F^c(U_h) - F^v(U_h, \nabla U_h) \right] \cdot \mathbf{n} \varphi_h dS - \\
 & \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_h \cdot \left[F^c(U_h) - \Theta \right] d\Omega = 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中 $W_h = \nabla \varphi_h$, $\hat{U}_h$ 表示边界上的变量通量, 在 IPDG 方法中定义为 $\hat{U}_h = \frac{1}{2}(U_h^+ + U_h^-)$ 。“-”和“+”分别表示当前单元边界内部和外部的值。

然后对式(8)进行一次分部积分得到式(10)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_e} \Theta W_h d\Omega = \int_{\Omega_e} F^v(U_h, \nabla U_h) W_h d\Omega + \\
 & \int_{S_e} (\hat{U}_h - U_h^-) \cdot \mathbf{n} (G^T W_h) dS = \\
 & \int_{\Omega_e} F^v(U_h, \nabla U_h) W_h d\Omega + \\
 & \int_{S_e} \frac{1}{2} (U_h^+ - U_h^-) \cdot \mathbf{n} (G^T W_h) dS \quad (10)
 \end{aligned}$$

用 $\hat{F}^c$ 和 $\hat{F}^v$ 分别表示边界上的无黏通量和黏性通量。则由式(9)和式(10)可以得到 IPDG 方法的半离散形式

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_e} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega_e} (F^v - F^c) \nabla \varphi_h d\Omega + \\
 & \int_{S_e} \frac{1}{2} (U_h^+ - U_h^-) \cdot \mathbf{n} G^T \nabla \varphi_h dS + \\
 & \int_{S_e} (\hat{F}^c - \hat{F}^v) \cdot \mathbf{n} \varphi_h dS = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

边界对流通量 $\hat{F}^c$ 取为 Lax-Friedrichs 通量^[26], 边界黏性通量 $\hat{F}^v$ 取为^[23]

$$\begin{aligned}
 \hat{F}^v \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{2} (F^v \cdot - + F^v \cdot +) \cdot \mathbf{n} - \\
 C_{IP} \frac{q^2}{h_f} F^v \left[\frac{1}{2} (U_h^+ + U_h^-), \frac{1}{2} (U_h^+ - U_h^-) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中 C_{IP} 表示惩罚因子, q 表示多项式的阶数, h_i 为当前面的面尺度。

1.3 人工黏性和网格自适应

当流场中出现强间断时,会出现数值振荡甚至计算发散。因此在利用 DG 方法模拟跨声速和超声速工况时,需要采用合适的激波捕捉方法来抑制激波附近的非物理振荡。人工黏性的思想是在控制方程中添加一个黏性修正项,将数值间断的传播限制在可解的尺度内。本文采用 Hartmann^[27]提出的方法构造人工黏性项 $F^s = \nu_s \nabla U_h$ 中的系数 ν_s

$$\nu_s = C_e h_e^{2-\beta} \left| -\nabla \cdot F^c(U) \right| \quad (13)$$

式中 C_e 和 β 为可变正常数,通常取 1,可根据收敛性和数值结果进行适当调整, h_e 表示单元尺度。引入人工黏性项后得到最终的离散方程

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega_e} (F^s + F^v - F^c) \nabla \varphi_h d\Omega + \\ \int_{S_e} \frac{1}{2} (U_h^+ - U_h^-) \cdot n G^T \nabla \varphi_h dS + \\ \int_{S_e} (\hat{F}^c - \hat{F}^v) \cdot n \varphi_h dS = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

人工黏性项的离散方法与物理黏性项相同。和其他人工黏性系数构造方法相比,该方法具有形式简单、高维高精度容易实现、紧致性好等优点。另外在激波附近由于流场中物理量梯度较大,在计算过程中需要自动加密激波附近的网格从而获得精度更高的数值结果,提高激波捕捉分辨率。本文采用 h 型网格自适应技术。考虑到计算效率,这里直接以 ν_s 作为误差指示函数。再根据误差指示函数的分布来自动细化和粗化单元。当一个单元的 ν_s 大于细化阈值 R 时则认为该单元需要细化,当 ν_s 小于粗化阈值 C 时认为该单元需要粗化。

1.4 嵌套网格

以图 1 所示的二维圆柱为例简要说明嵌套网格的结构以及重叠边界的定义。图中红色单元和绿色单元分别表示 Block 1(贴体网格)和 Block 2(背景网格),这里以 Block 1 中与外边界(图中黑色边界)相邻的一层网格点作为初始洞边界,经逆映射“挖洞”^[28-29]过程后得到图 1 所示的网格,其中 Block 2 中的蓝色边界即为“挖洞”之后得到的人工内边界。组成 Block 2 中人工内边界的单元称为洞边界单元,经“挖洞”过程被剔除掉的 Block 2 中的单元称为洞内单元,被保留下来的 Block 2 中的单元称为洞外单元。在计算过程中,Block 1 的

外边界需要从 Block 2 中获取流场信息作为 Block 1 计算域的边界条件进行下一步的计算,同样 Block 2 中的人工内边界需要从 Block 1 中获取流场信息作为 Block 2 计算域的边界条件进行下一步的计算。通过这样的方式实现两个计算域之间流场信息的交互。本文将这种需要从别的计算域中获取流场信息作为自身计算域边界条件的边界称为重叠边界。

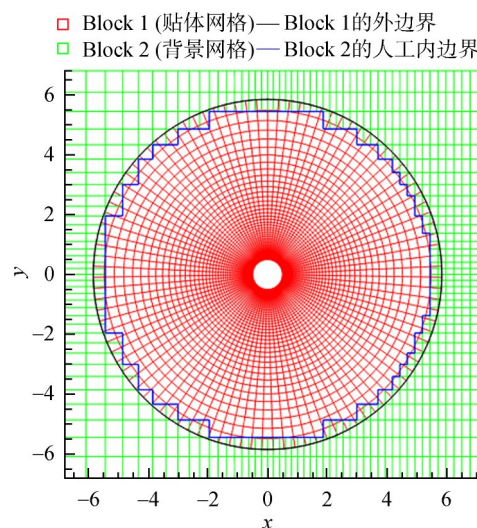


图1 嵌套网格结构示意图

Fig.1 Sketch of chimera grid structure

计算方程(式(14))中的积分项时常用高斯积分来近似计算,因此需要得到边界上高斯积分点处的流场信息,从而得到边界处的对流通量和黏性通量。如图 2 所示,红色单元和绿色单元分别表示 Block 1(计算域 1)和 Block 2(计算域 2),Block 1 中的蓝色边界代表重叠边界。 $\Omega_{i,j}$ 和 $E_{i,j}$ 分别表示 Block 1 和 Block 2 中的单元,黑色实心圆代表高斯积分点。为了实现流场信息的交换,Block 1 重叠边界上的每个高斯积分点都需要从 Block 2 中获取流场信息。

以图 2 中的高斯积分点①为例,由于它的全局坐标是已知的,则利用二叉树搜索算法^[30]可以定位出它位于 Block 2 中的单元 $E_{i,j}$ 内,则单元 $E_{i,j}$ 就是为它提供流场信息的贡献单元。然后再利用 Newton 迭代法得到高斯积分点①在贡献单元 $E_{i,j}$ 中的局部坐标 (ξ, η) 。由于贡献单元中数值解的多项式展开式是已知的,则通过局部坐标 (ξ, η) 进行插值可以得到高斯积分点①处的流场信息

$$U_h^+ = \sum_{j=1}^{q+1} u_j \varphi_j(\xi, \eta) \quad (15)$$

当插值高斯积分点刚好落在单元交界面上或

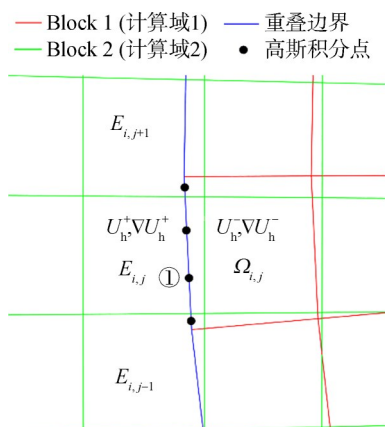


图2 数值插值方法示意图

Fig.2 Sketch of numerical interpolation method

者单元顶点上时,会识别出多个贡献单元。对于多贡献单元情况,本文采用一种简单的处理方法即从各个贡献单元中分别插值再取平均值^[14],更合理的处理方法将在后续的工作中考虑。值得一提的是在嵌套网格应用有限体积法以及有限差分法时,依赖于守恒变量的插值方法在单元交界面处可能存在插值守恒性问题,上述插值方法同样存在这个问题,但是随着网格的加密或计算精度的提高,由于不守恒插值方式造成的误差会趋于零^[14,31]。并且在人工内边界远离壁面的情况下,物理场梯度较小,上述守恒性误差可控。另外,如果某区域有两套以上嵌套网格时会采用层次化处理方法。具体来说,在某一区域,当一个物体被标记为洞外单元时,则其他物体会被标记为洞内单元或者洞边界单元。这样就从算法层面保证了多个物体网格落在同一区域时,只有一套网格开展传统意义的嵌套计算。上述方案根据具体的算例流场特点实施。

2 数值结果

2.1 库埃特流动

库埃特流动描述的是两块平板之间的黏性流动,上平板以恒定速度运动,底板静止,其精确解为^[32]

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{H} & v &= 0 \\ p &= \frac{1}{\gamma Ma_\infty^2} \\ T &= T_0 + \frac{y}{H}(T_1 - T_0) + \frac{Pr(\gamma - 1)Ma_\infty^2}{2} \cdot \\ &\quad \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

本文取上平板温度 $T_1 = 0.85$, 下平板温度 $T_0 = 0.8$, 高度 $H = 2$, 长度 $L = 2H$ 。上平板马赫数 Ma_∞ 取 0.2, 雷诺数取 1 000。边界条件取精确解边界条件, 计算由均匀流场作为初始条件推进。计算使用如图 3 所示的 3 套逐次加倍的网格, 红色单元和绿色单元分别表示 Block 1 和 Block 2, 黑色边界表示 Block 1 的外边界, 蓝色边界表示 Block 2 的人工内边界, Block 1 和 Block 2 中单元的尺度保持一致。

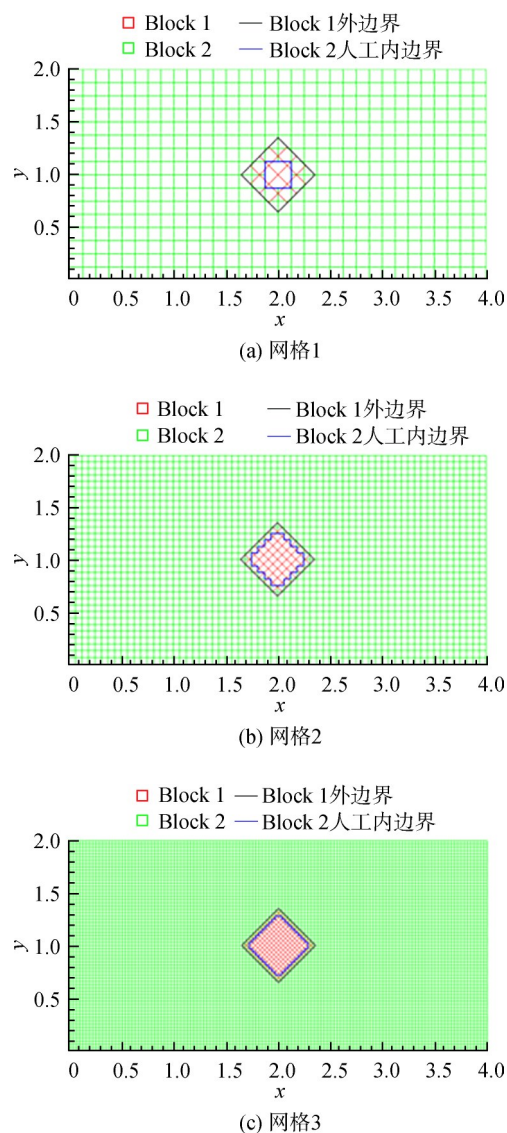


图3 库埃特流动问题所用嵌套网格示意图

Fig.3 Sketches of chimera grid system for Couette flow

表 1 为在不同精度情况下 ($q=1\sim 3$, q 表示多项式阶数) 对密度 L_2 误差和数值精度, 可以看到各阶格式均达到了设计精度。

2.2 定常圆柱绕流

为了进一步验证方法的可靠性和收敛性, 对

表 1 库埃特流数值精度测试

Table 1 Numerical accuracy test of Couette flow

网格	单元数			$q=1$		$q=2$		$q=3$	
	Block 1	Block 2 (“挖洞”前)	Block 1+Block 2 (“挖洞”后)	误差/ 10^{-7}	精度	误差/ 10^{-9}	精度	误差/ 10^{-10}	精度
网格 1	4×4	32×16	524	33.0		13.7		34.3	
网格 2	8×8	64×32	2 072	9.63	1.78	1.71	3.00	2.49	3.78
网格 3	16×16	128×64	8 268	2.75	1.81	0.211	3.02	0.19	3.71

二维定常圆柱绕流进行了数值模拟。其中圆柱体直径 $d=1$,来流条件为马赫数 $Ma_\infty=0.2$,雷诺数 $Re=40$ 。圆柱物面采用无滑移绝热边界,远场边界采用黎曼无反射边界条件。计算所采用的网格如图 1 所示,贴体网格和背景网格分别包含 5 346 和 5 710 个单元。下文用 IPDG (2)、IPDG (3)、IPDG (4) 分别表示 2 阶精度、3 阶精度和 4 阶精度的 IPDG 方法。图 4 和图 5 分别为用 IPDG (4) 计算得到的流场的压力 p 的等值线图和流线示意图。从图 4 可以看出在贴体网格和背景网格的交界处等值线依然可以保持连续,证明了不同计算域之间流场信息交互过程的可靠性,另外从图 5 中可以清晰地观察到低雷诺数下出现的对称脱落涡。图 6 为各阶方法的残差随迭代步数变化的曲线,可以看到各阶方法都可以在较少的迭代步数内达到收敛。表 2 为各阶方法计算所得的压差阻力系数、摩擦阻力系数、总阻力系数、回流区长度以及参考值,最终计算结果与参考值^[33]符合良好。同时随着精度提高,计算结果与参考值之间的误差不断减小,特别是回流区长度,说明本方法取得了精度阶加密上的收敛性。

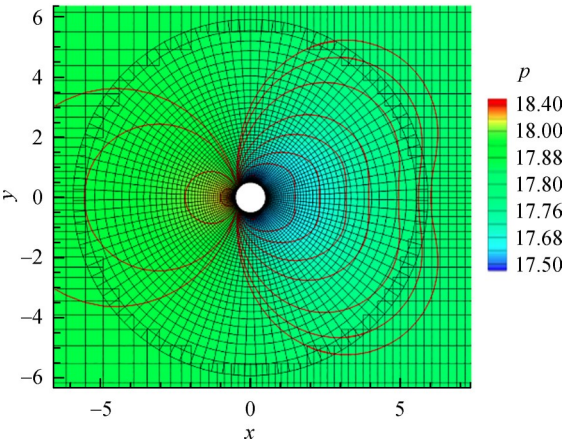


图 4 定常圆柱绕流压力等值线图

Fig.4 Pressure contours of steady flow around cylinder

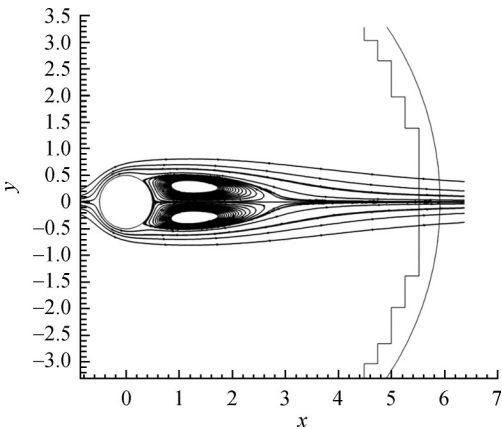


图 5 定常圆柱绕流流线示意图

Fig.5 Sketch of streamlines of steady flow around cylinder

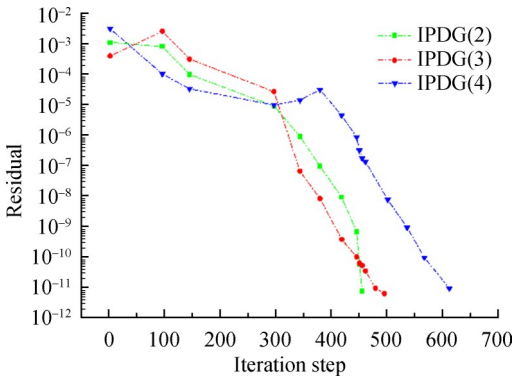


图 6 定常圆柱绕流各阶方法的残差变化

Fig.6 Residual variation of steady flow around cylinder for different schemes

表 2 各阶方法计算所得阻力系数和回流区长度

Table 2 Drag coefficient and recirculation length of different schemes

数值方法	压差阻力系数	摩擦阻力系数	总阻力系数	回流区长度
IPDG (2)	1.020	0.5207	1.5407	2.31
IPDG (3)	1.021	0.5270	1.5480	2.16
IPDG (4)	1.021	0.5273	1.5483	2.11
Ref. [33]	1.038	0.5304	1.5684	2.10

2.3 非定常圆柱绕流

第 3 个算例为非定常圆柱绕流,圆柱体的直径、计算所采用的网格以及边界条件与计算定常工况时相同。来流条件为马赫数 $Ma_\infty = 0.2$, 雷诺数 $Re = 150$, 在这种工况下圆柱体后方会形成卡门涡街。图 7 和图 8 分别为利用 IPDG(4) 计算所得的瞬态马赫数 Ma 等值线图以及 z 方向涡量 ω_z 分布图。从图 7 可以看出在两块网格的交界处数值解并没有出现跳跃, 仍然可以保持连续, 证明了在非定常工况下不同计算域之间流场信息交互过程的可靠性。从图 8 可以看到在圆柱两侧脱落后旋转方向相反、排列规则的涡结构, 尺度大约和圆柱直径接近, 并且随着离开圆柱往下游越来越远, ω_z 的绝对值逐渐变小。图 9 为利用 IPDG(4) 计算所得到的阻力系数 C_d 和升力系数 C_l 随时间变化的周期性曲线, 与周期性的涡脱落过程相对

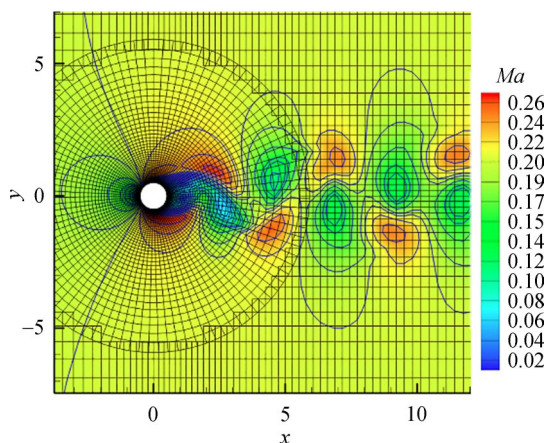


图 7 瞬态马赫数等值线图

Fig.7 Instantaneous Mach number contours

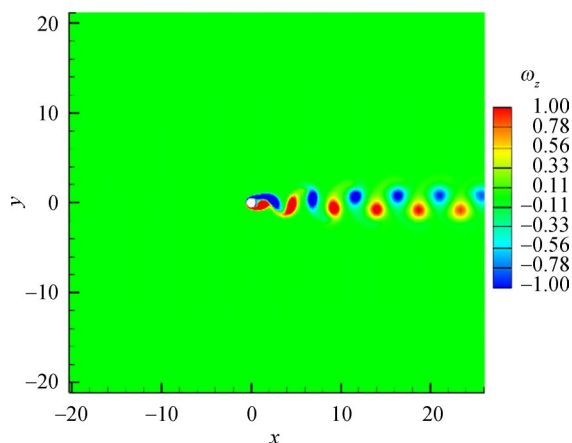


图 8 瞬态 z 方向涡量分布图

Fig.8 Instantaneous distribution of vorticity in the z direction

应。表 3 给出了利用各阶方法计算得到的时均阻力系数、 C_d 和 C_l 的峰峰值以及斯特罗哈数, 随着精度的提高计算结果和参考值^[33-34]符合良好。

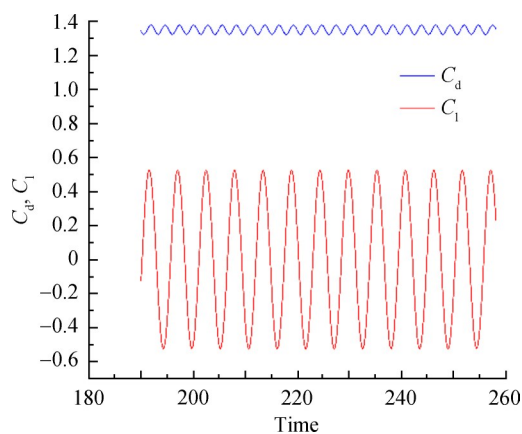


图 9 升阻力系数随时间周期性变化

Fig.9 Periodical variation of drag and lift coefficients along with time

表 3 各阶方法计算所得时均阻力系数、阻力系数峰峰值、升力系数峰峰值和斯特罗哈数

Table 3 Time-averaged drag coefficient, peak to peak drag coefficient, peak to peak lift coefficient and Strouhal number of different schemes

数值方法	C_d 时均值	C_d 峰峰值	C_l 峰峰值	斯特罗哈数
IPDG(2)	1.324	0.050 77	1.075	0.182
IPDG(3)	1.349	0.054 16	1.050	0.184
IPDG(4)	1.351	0.053 56	1.050	0.183
Ref. [33]	1.349	0.052 1	1.049	0.183
Ref. [34]	1.34	0.052 28	1.040 6	0.183

2.4 NACA0012 翼型绕流

第 4 个算例为亚声速有黏 NACA0012 翼型绕流, 来流条件为马赫数 $Ma_\infty = 0.5$, 雷诺数 $Re = 5\,000$, 攻角 $\alpha = 0^\circ$, 翼型物面采用无滑移绝热边界条件, 远场边界条件采用黎曼无反射边界条件。图 10 为翼型附近局部网格视图, 贴体网格和背景网格分别包含 7 500 和 20 670 个单元。

图 11 和图 12 分别为利用 IPDG(4) 计算得到的马赫数等值线图以及翼型后缘流线图。从图 11 中可以看到在网格交界处数值解依然可以保持连续, 另外从图 12 中可以清晰地看到翼型后缘尾部脱落出来的对称涡, 这跟文献[33]中的计算结果吻合地很好。

图 13 为各阶方法计算所得的上翼面压力系

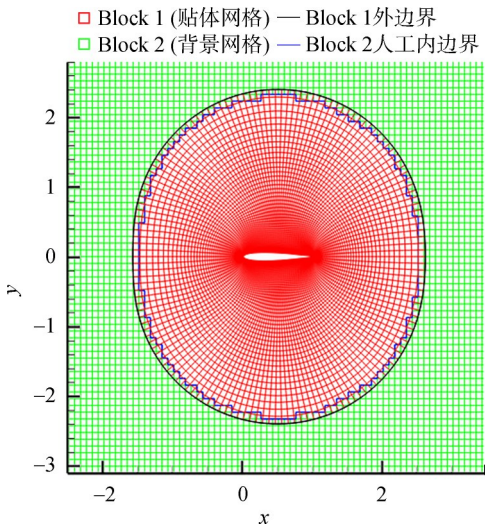


图 10 翼型附近网格局部视图
Fig.10 Enlarged view of the computational grid near airfoil

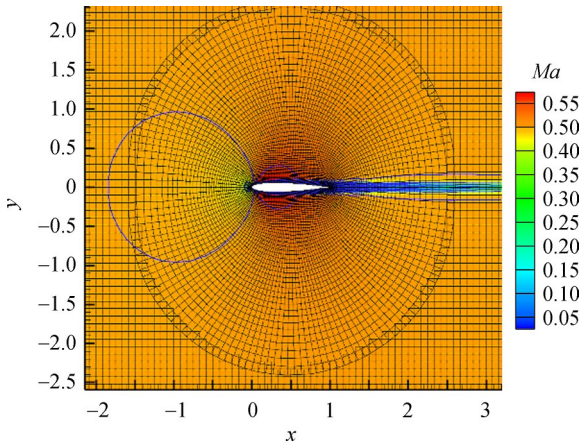


图 11 马赫数等值线图
Fig.11 Mach number contour

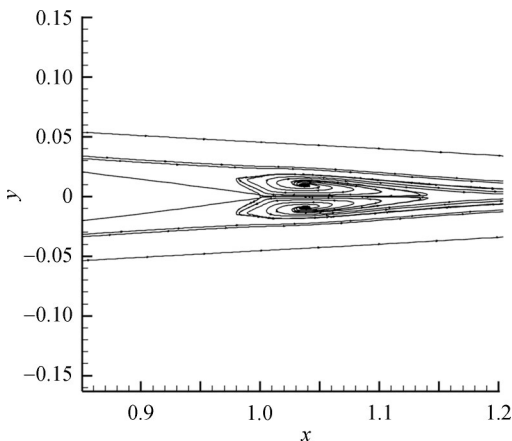


图 12 翼型尾部流线图
Fig.12 Streamlines near the trailing edge

数 C_p 的分布以及相应的参考值^[19], x/c 表示沿翼型物面的 x 坐标,随着精度的提高计算结果更具有

一致性并且与参考值符合良好。表 4 给出了各阶方法计算得到的阻力系数 C_d 以及相应的参考值,随着精度的提高计算结果与参考值^[19]符合良好。另外在图 14 给出了各阶方法的残差随迭代步数变化的曲线,可以看到各阶方法都可以在较少的迭代步数内达到收敛。

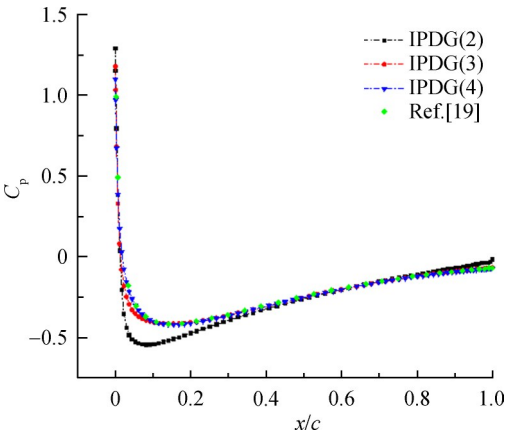


图 13 上翼面压力系数分布
Fig.13 Pressure coefficients distribution along airfoil upper surface

表 4 各阶方法计算所得阻力系数	
Table 4 Drag coefficients of different schemes	
数值方法	阻力系数 C_d
IPDG(2)	0.045 36
IPDG(3)	0.052 83
IPDG(4)	0.054 25
Ref. [19]	0.055 11

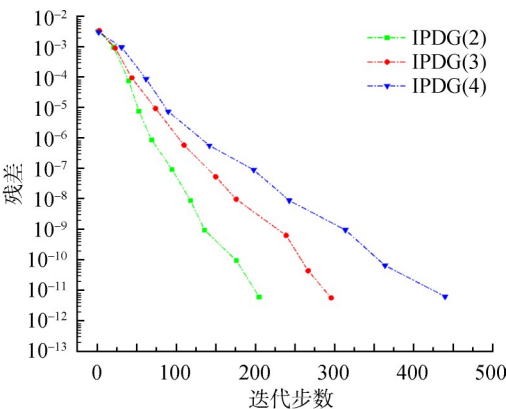


图 14 翼型绕流各阶方法的残差变化
Fig.14 Residual variation of steady flow around airfoil for different schemes

2.5 无黏跨声速 NACA0012 翼型绕流

最后为了验证在嵌套网格中应用 h 型网格自

适应技术和人工黏性的可行性,利用3阶DG方法进行了无黏跨声速NACA0012翼型绕流的数值模拟。来流条件为马赫数 $Ma_\infty=0.8$,攻角 $\alpha=1.25^\circ$,翼型物面采用滑移边界条件,远场采用黎曼无反射边界条件,这种工况下在翼型的上翼面会出现一道较强的激波。图15为自适应前后翼型附近网格的局部视图,为了验证在有激波的情况下重叠边界的可靠性,取初始洞边界为较靠近物面的一层网格点,“挖洞”后得到人工内边界(图中蓝色边界)。无自适应时的初始网格共包含6 540个单元,其中贴体网格和背景网格分别包含2 000个单元和4 540个单元,自适应后总单元数为7 092个。

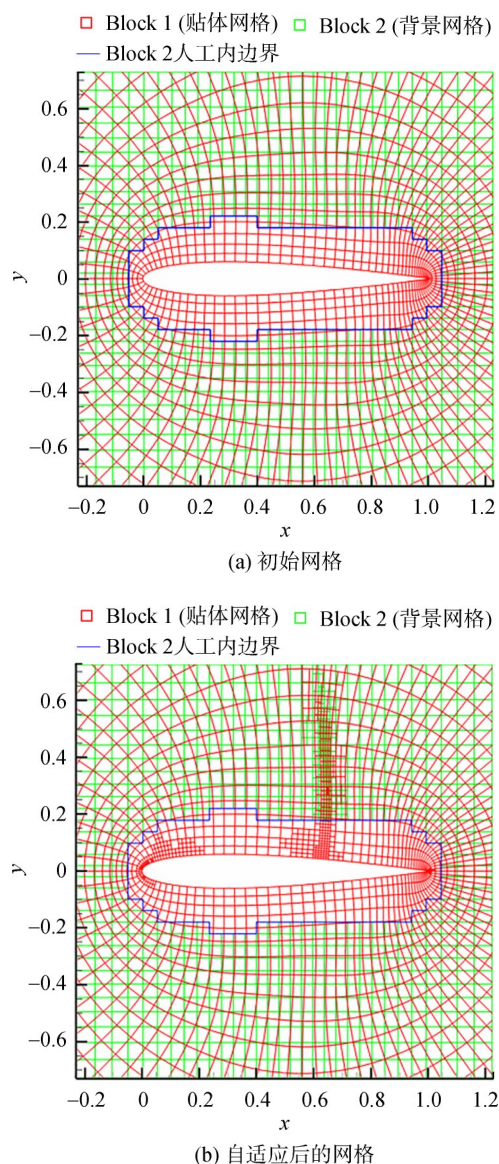


图15 跨声速无黏翼型附近网格局部视图
Fig.15 Enlarged view of the computational grid near transonic inviscid airfoil

图16为自适应前后误差函数分布图。从图15和图16可以看出,在激波附近区域误差函数较大,而远离激波区域误差函数充分小,并且在误差函数较大的区域贴体网格和背景网格都进行了自动加密。

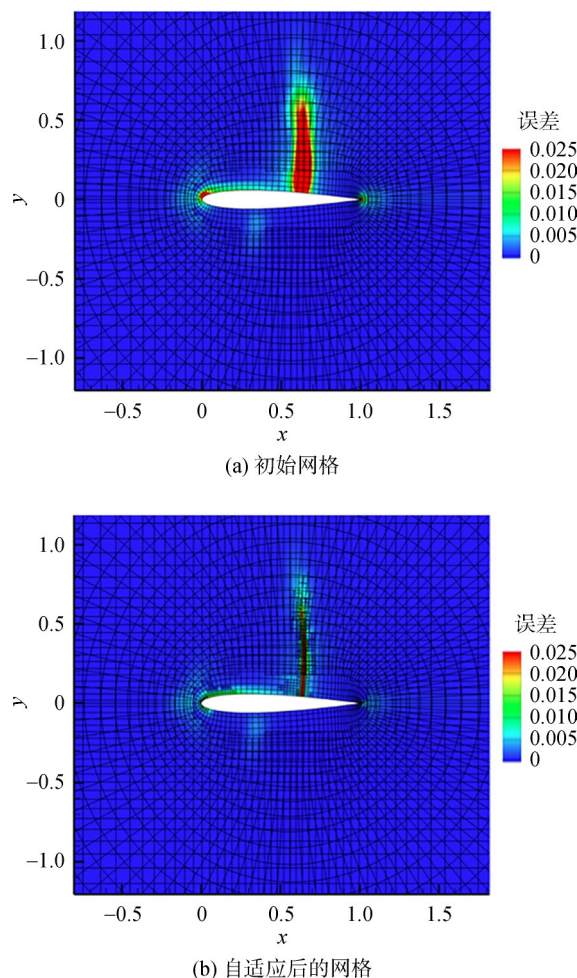


图16 跨声速无黏翼型误差函数分布
Fig.16 Distribution of error function of transonic inviscid airfoil

图17为自适应前后压力 p 的等值线图,可以看到自适应前由于网格尺度较大导致激波捕捉地较厚,而自适应后在激波附近贴体网格和背景网格都进行了自动加密,激波厚度大幅减小,激波分辨率显著提高,压力等值线也更集中在间断面。

图18为自适应前后物面压力系数的负值 $-C_p$ 与实验值(Exp.)^[35]的对比,可以看到自适应之前的计算结果除了在激波附近与实验值略有差距外,在其他位置都符合得较好,而自适应之后由于激波捕捉得更准确,激波附近的计算结果也与实验值保持一致。图19为残差随迭代步数的变化曲线,可以看到自适应前后都能达到收敛。

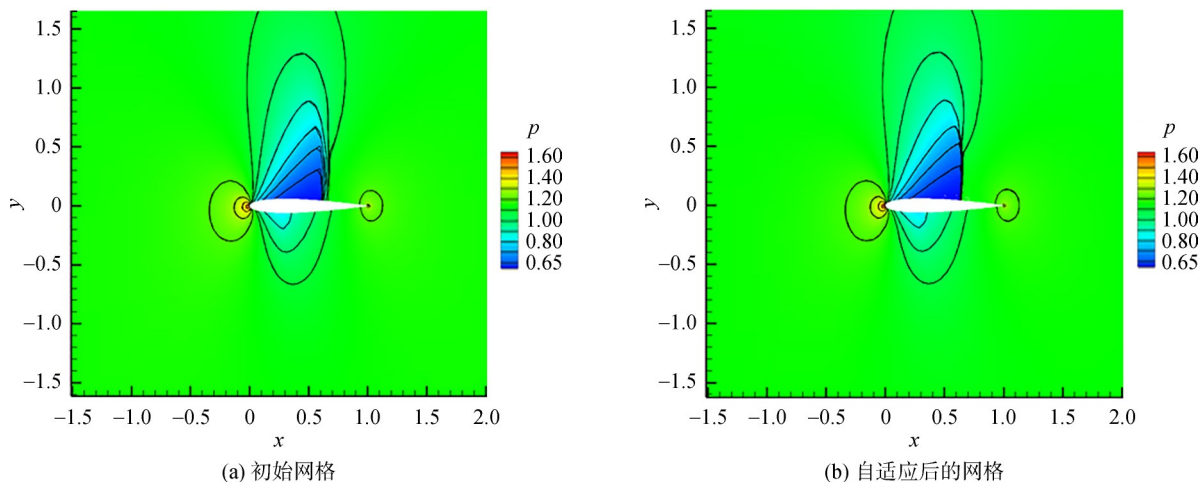


图17 跨声速无黏翼型压力等值线

Fig.17 Pressure contour of transonic inviscid airfoil

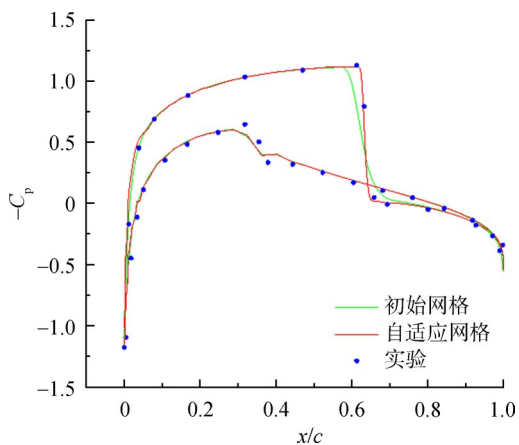


图18 翼型物面压力系数分布

Fig.18 Pressure coefficients along the airfoil surface

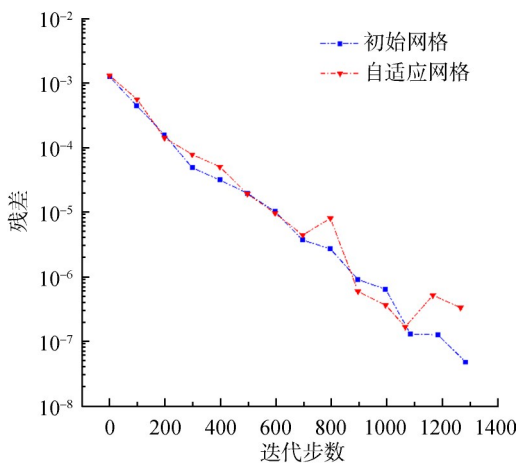


图19 无黏跨声速翼型残差变化

Fig.19 Residual variation of transonic inviscid airfoil

3 结 论

本文实现了IPDG方法框架内的嵌套网格技术开发。由此求解了二维可压缩N-S方程。另外

在嵌套网格中应用了h型网格自适应技术以提高激波分辨率。可以得到以下结论:

1) 库埃特流动计算结果表明该方法达到了设计精度。本文还对包括定常和非定常圆柱绕流以及翼型绕流在内的黏性问题开展了数值模拟。计算结果均与参考值吻合,并且所计算定常问题都能在较少的Newton迭代步内达到收敛,证明了方法的可靠性以及具有较好的收敛性。

2) 本文在无黏跨声速NACA0012翼型绕流算例中应用了h型网格自适应技术,自适应之后的单元数相比无自适应时只增加了8.4%,但是激波分辨率得到了显著提高,激波附近的计算结果也与实验值符合得更好。证明了在嵌套网格中应用自适应网格技术的可行性和有效性。

下一步拟将现有的工作推广到三维问题以及非结构网格中,为嵌套网格和IPDG方法相结合解决工程实际问题奠定了基础。

参考文献:

- [1] BENEK J, STEGER J, DOUGHERTY F. A flexible embedding technique with application to the Euler equations[R]. AIAA-1983-1944, 1983.
- [2] CHAN W M. Overset grid technology development at NASA ames research center[J]. Computers and Fluids, 2009, 38(3): 496-503.
- [3] POMIN H, WAGNER S. Aeroelastic analysis of helicopter rotor blades on deformable chimera grids[J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(3): 577-584.
- [4] SITARAMAN J, POTSDAM M, WISSINK A, et al. Rotor loads prediction using helios: a multisolver framework for rotorcraft aeromechanics analysis[J]. Journal of Aircraft, 2013, 50(2): 478-492.
- [5] SHI Lei, WANG Zhijian, FU Song, et al. A PNPM-CPR meth-

- od for Navier-Stokes equations[R].AIAA-2012-460,2012.
- [6] SHERER S E, SCOTT J N. High-order compact finite-difference methods on general overset grids[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 210(2):459-496.
- [7] SHERER S, VISBAL M, GALBRAITH M. Automated preprocessing tools for use with a high-order overset-grid algorithm[R].AIAA-2006-1147, 2006.
- [8] REED W H, HILL T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R].LA-UR-73-479, 1973.
- [9] COCKBURN B, SHU Chiwang. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws: II general framework[J]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186):411-435.
- [10] COCKBURN B, LIN S Y, SHU Chiwang. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws: III one-dimensional systems [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 84(1):90-113.
- [11] COCKBURN B, HOU S, SHU Chiwang. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws: IV the multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190):545-581.
- [12] COCKBURN B, KARNIADAKIS G E, SHU Chiwang. Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
- [13] GALBRAITH M C, ORKWIS P D, BENEK J A. Extending the discontinuous Galerkin scheme to the chimera overset method[R].AIAA-2011-3409, 2011.
- [14] GALBRAITH M C, BENEK J A, ORKWIS P D, et al. A discontinuous Galerkin chimera scheme[J]. Computers and Fluids, 2014, 98:27-53.
- [15] GALBRAITH M C, ORKWIS P D, BENEK J A. A 3-D discontinuous Galerkin chimera overset method[R]. AIAA-2014-0776, 2014.
- [16] GALBRAITH M C, BENEK J A, ORKWIS P D, et al. A discontinuous Galerkin scheme for chimera overset viscous meshes on curved geometries[J]. Computers and Fluids, 2015, 119:176-196.
- [17] NASTASE C, MAVRIPLIS D, SITARAMAN J. An overset unstructured mesh discontinuous Galerkin approach for aerodynamic problems[R].AIAA-2011-195, 2011.
- [18] BRAZELL M J, KIRBY A C, MAVRIPLIS D. A high-order discontinuous-Galerkin octree-based AMR solver for overset simulations[R].AIAA-2017-3944, 2017.
- [19] BASSI F, REBAY S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(2):267-279.
- [20] ARNOLD D N, BREZZI F, MARINI D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2002, 39(5):1749-1779.
- [21] BASSI F, CRIVELLINI A, REBAY S, et al. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations[J]. Computers and Fluids, 2005, 34(4/5):507-540.
- [22] COCKBURN B, SHU Chiwang. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(6):2440-2463.
- [23] HARTMANN R, HOUSTON P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations: I method formulation[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006, 3(1):1-20.
- [24] HARTMANN R, HOUSTON P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations: II goal-oriented a posteriori error estimation[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006, 3(2):141-162.
- [25] DE WIART C C, HILLEWAERT K, BRICTEUX L, et al. Implicit LES of free and wall-bounded turbulent flows based on the discontinuous Galerkin/symmetric interior penalty method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 78(6):335-354.
- [26] TORO E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [27] HARTMANN R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2006, 51(9/10):1131-1156.
- [28] CAO Yihua, ZHAO Ming. Numerical simulation of rotor flowfields based on several spatial discretization schemes[J]. Journal of Aircraft, 2012, 49(5):1535-1539.
- [29] ZHAO Ming, XIAO Zhixiang, FU Song. Predictions of transition on a hovering tilt-rotor blade[J]. Journal of Aircraft, 2014, 51(6):1904-1913.
- [30] CRAIN T, GRAMOLI V, RAYNAL M. A contention-friendly binary search tree[R]. Berlin Heidelberg: European Conference on Parallel Processing, 2013.
- [31] WANG Zhijian, HARIHARAN N, CHEN Rangfu. Recent development on the conservation property of chimera[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2001, 15(4):265-278.
- [32] SUN Yuzhi, WANG Zhijian, LIU Yen. High-order multi-domain spectral difference method for the Navier-Stokes equations[R].AIAA-2006-301, 2006.
- [33] ZHANG Laiping, LIU Wei, LI Ming, et al. A class of DG/FV hybrid schemes for conservation law: IV 2D viscous flows and implicit algorithm for steady cases[J]. Computers and Fluids, 2014, 97:110-125.
- [34] MÜLLER B. High order numerical simulation of aeolian tones[J]. Computers and Fluids, 2008, 37(4):450-462.
- [35] 孙强, 吕宏强, 伍贻兆. 基于高阶物面近似的自适应间断有限元法欧拉方程数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2015, 33(4):446-453.
- SUN Qiang, LÜ Hongqiang, WU Yizhao. Adaptive discontinuous Galerkin method to solve Euler equations based on high-order approximative boundary[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2015, 33(4):446-453. (in Chinese)

(编辑:王碧珺)